

TÉCNICAS DE PÓS-PROCESSAMENTO EM ESCOAMENTOS DE FRONTEIRA LIVRE NOS PROCESSOS DO FABRICO DOS COMPÓSITOS

Zuzana Dimitrovová*

UNIC, Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa
2829 516 Caparica
web: <http://www.dec.fct.unl.pt/UNIC/>
e-mail: zdim@fct.unl.pt

Palavras-chave: tensão de superfície, pressão capilar, escoamentos de fronteira livre, análise no nível mesoscópico, moldação líquida, técnicas de pós-processamento

Resumo. *As técnicas de pós-processamento da solução de MEF consistem em recálculo de modo que a taxa de convergência aumenta sem a necessidade de refinar a malha. São eficientes quando a maior precisão exige-se nas derivadas de variáveis nos nós na fronteira da condição de Dirichlet. Podem ser usadas na simulação de escoamento de Darcy de fronteira livre durante a infiltração de resina, porque apenas velocidades na fronteira, onde pressão capilar é aplicada, são precisas para determinar o avanço para a próxima posição. Apresenta-se também uma técnica nova para escoamento de Stoke e simulações numéricas com as técnicas de pós-processamento implementadas.*

1. INTRODUÇÃO

As novas tendências na indústria dos transportes requerem a implementação de materiais compósitos, devido à versatilidade no projecto, baixo peso, elevada resistência mecânica e adequabilidade aos requisitos da indústria. As exigências na redução dos custos de fabrico requerem a implementação das novas técnicas de fabrico deles. Os processos de fabrico de moldação líquida são processos em que as pré-formas de fibras contínuas de reforço, compostas pelas fitas de fibras, são arranjadas e fechadas dentro da cavidade de molde e uma resina polímera é injectada para preencher todos os espaços entre as fibras. É importante assegurar uma adesão adequada entre as duas componentes e enchimento de todos os vazios. A física do avanço da resina nestas tecnologias ainda não está totalmente compreendida, aumentando o risco potencial de falhas durante a produção de peças de maiores dimensões. A simulação numérica do escoamento é inevitável para a determinação de uma estratégia óptima de injeção.

A utilização dos reforços na forma de têxteis compostos pelas fitas de fibras, trouxe num lado melhores propriedades dos compósitos finais e facilitou o arranjo dos reforços dentro da cavidade de molde. No outro lado estes reforços causam significativa não-uniformidade na progressão de resina, não só através da espessura, mas também no plano de componentes fabricados, como consequência do facto que a cadeia de fibras forma um meio de porosidade dupla. A não-uniformidade de progressão faz o processo de enchimento mais sensível a formação das bolhas de ar e a criação dos vazios. Torna-se assim indispensável existência duma simulação numérica do processo de enchimento, que conseguisse reproduzir a física de formação dos vazios e consequentemente definir as propriedades do processo para a impedir. O software usado na simulação numérica deve contabilizar correctamente os efeitos de capilaridade, ou seja não se pode desprezar a influência da tensão de superfície, que corresponde a introdução da pressão capilar, aplicada na fronteira livre, [1-2].

Como a porosidade dupla é responsável pela não-uniformidade da progressão de resina, a “indesejável” criação dos vazios pode-se modelar da melhor maneira numa análise no nível mesoscópico, onde as dimensões características do meio dos reforços, que é aproximadamente periódico, correspondem aos diâmetros principais das fitas, que são na ordem de milímetros. Neste nível as fitas de fibras podem-se substituir pelos meios porosos com porosidade simples e uniforme. Assim escoamentos dos dois níveis distintos tem que ser ligados numa só análise: um gerido pelas equações de Stoke nos espaços entre as fitas e outro pela lei de Darcy dentro das fitas de fibras.

A simulação do escoamento de resina no nível mesoscópico foi resolvida pela incorporação das equações de fronteira livre no código dos elementos finitos comercializado - ANSYS, com a designação o Programa de fronteira livre (PFL). O PFL representa um trabalho de programação complexo, com ligação automática de módulos escritos em Fortran, Ansys Parametric Design Language (APDL) e Maple, que são aplicados a Ansys CFD (computational fluid dynamics) módulo Flotran para resolver uma análise de base [2-4]. O Flotran permite incluir a influência dos meios porosos como resistências distribuídas, que facilita a implementação numérica. O escoamento assume-se quase estacionário e a integração ao longo do tempo é implementada como explícita.

Apesar de o escoamento ser incompressível, detectaram-se erros na conservação de massa para os números capilar baixos. Quando além disso foram implementados espaços de tempo inadequados, observou-se uma oscilação da fronteira livre em função de tempo por razões puramente numéricas. Para eliminar estes factores, alguns métodos de estabilização foram apresentados e comparados em [2]. Estudou-se depois uma metodologia de “estabilização” diferente, baseada em técnicas de pós-processamento da solução de método dos elementos finitos. Na parte de escoamento de Darcy, onde é válida a analogia com a análise térmica, a metodologia é bem conhecida [5-8]. No caso de escoamento de Stoke, sugeriu-se uma metodologia ainda não publicada, que deve contabilizar o efeito da condição de fronteira Dirichlet essencial aplicada na fronteira livre. Esta condição de fronteira torna o problema mal posto em termos da formulação fraca usada em códigos comercializados de dinâmica dos fluídos baseados no método de Galerkin contínuo. Em consequência existe um error na conservação local de massa de resina, acumulado especialmente ao longo de fronteira livre,

que consequentemente afecta a conservação de massa global. A origem deste error está no facto que na formulação fraca a condição de incompressibilidade é multiplicada pela pressão de teste, que é nula ao longo da fronteira livre, i.e. onde a condição de fronteira essencial é imposta na pressão, e em consequência o espaço de pressões de teste é incompleto. Este error poderá ser diminuído com o refinamento de malha, mas no caso de número capilar baixo, um refinamento adequado exigia um tempo de cálculo insuportável. Além disso o refinamento de malha afectava também o passo de tempo para a integração explícita.

Ambas técnicas de pós-processamento foram implementadas no PFL, [9-10]. Detectou-se no entanto que nem sempre o melhoramento esperado foi realmente conseguido, mesmo na parte de escoamento de Darcy, como consequência que não foi prestada atenção suficiente ao tipo de função de aproximação de pressão capilar. Após de uma análise mais profunda, apresenta-se uma alteração da metodologia de [9-10].

O artigo está organizado da forma seguinte: Primeiro, em Secção 2, a análise no nível mesoscópico é definida e apresentam-se as equações directivas do problema. Secção 3 apresenta nas suas subsecções o PFL, a metodologia de recálculo das velocidades na fronteira livre para o escoamento de Darcy, análise detalhada dos resultados com e influência dos “cantos”, a alteração sugerida e a técnica nova para o escoamento de Stoke. O artigo está concluído em Secção 4.

2. DESCRIÇÃO DA ANÁLISE NO NÍVEL MESOSCÓPICO

No nível mesoscópico as fitas de fibras podem-se substituir pelos meios porosos com porosidade simples e uniforme. Assim escoamentos dos dois níveis distintos tem que ser ligados numa só análise: um gerido pelas equações de Stoke nos espaços entre as fitas e outro pela lei de Darcy dentro das fitas de fibras. Fisicamente o avanço de resina está promovido pelo gradiente de pressão e a acção capilar e resistido pelas forças viscosas e a cadeia de fibras. Neste contexto é aconselhável separar a pressão entre a parte hidrodinâmica, que corresponde a aplicação de pressão do exterior, e a parte capilar, que resulta do efeito de tensão de superfície. A análise do escoamento pode-se separar em dois casos básicos: escoamento através e ao longo das fitas de fibras, [1-2].

No caso de escoamento através das fitas de fibras, os estudos experimentais [11-13] e numéricos [1, 2, 4, 14] claramente mostram que o enchimento das fitas está atrasado. O avanço de resina, apesar de ajudado pela pressão capilar dentro das fitas bastante forte, não consegue ao mesmo tempo ultrapassar a permeabilidade muito baixa. Habitualmente apenas uma faixa fina ao longo da superfície da fita está saturada no momento em que a resina a tinha ultrapassado.

No caso de escoamento ao longo das fitas, dois tipos de esquemas podem ser detectados. A fronteira de resina dentro da fita pode ser ou avançada ou atrasada relativamente à fronteira primária, que é aquela nos espaços entre as fitas de fibras, [2, 15-17]. Como acção capilar não depende da pressão externa aplicada, mas é puramente função de tensão de superfície, ângulo de contacto e de geometria, estes dois esquemas podem ser explicados da seguinte maneira: Quando a pressão aplicada é alta, forças viscosas dominam e o gradiente de pressão hidrodinâmica é também alto. Por isso a resina desloca-se mais rápido nos espaços entre as

fitas. Quando ao contrário a pressão aplicada é baixa, a acção capilar dentro das fitas domina e a fronteira avança mais rápido ali. Para um enchimento aceitável, tem que se encontrar os parâmetros do processo para equilibrar estes dois efeitos e assegurar assim uma progressão de resina mais ou menos uniforme. Por isso a simulação numérica tem que prever estas situações com uma exactidão suficiente.

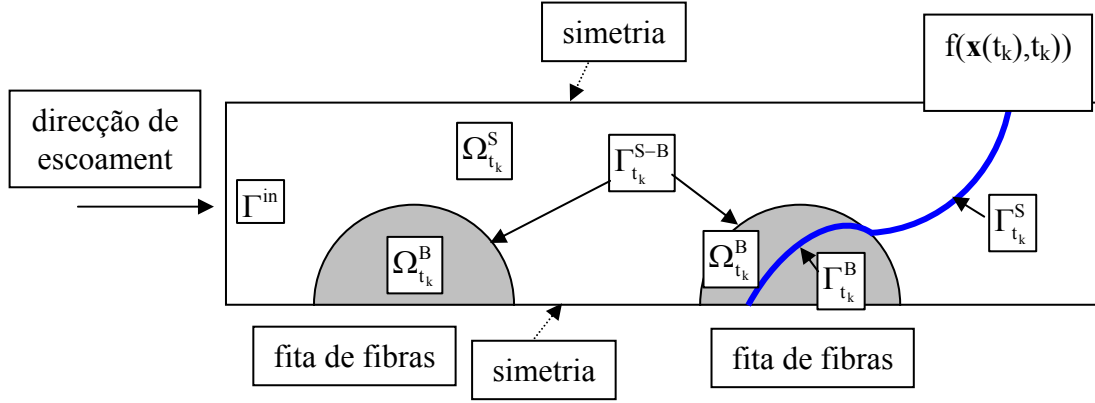


Figura 1. Designação das regiões e fronteiras do escoamento no nível mesoscópico.

O escoamento na região entre as fitas, $\Omega_{t_k}^S$, pode ser caracterizado pelas equações de Stoke e na região dentro das fitas, $\Omega_{t_k}^B$, pela lei de Darcy. De facto a ligação entre estes dois tipos de escoamentos, i.e. a mudança de escala, tem que ser dentro das fitas assegurada pela formulação de Brinkman, para tomar em consideração a tensão viscosa na superfície entre estas duas regiões, $\Gamma_{t_k}^{S-B}$, no entanto, a importância deste termo viscoso diminui-se rapidamente com a distância da interface (Figura 1). Para simulação numérica podem-se assumir escoamentos são quase estacionários e integração ao longo do tempo na forma explícita. Assim o sistema de equações directivas na parte actualmente saturada, que tem que ser resolvido em cada passo de tempo discretizado, t_k , é formado por:

$$\text{na região entre as fitas: } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ e } \nabla p = \mu \Delta \mathbf{v} \quad \text{em } \Omega_{t_k}^S \quad (1)$$

(equações de Stoke),

$$\text{dentro das fitas: } \nabla \cdot \mathbf{v}^D = 0 \text{ e } \nabla p^f = \mu \Delta \mathbf{v}^D - \mu \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{v}^D \quad \text{em } \Omega_{t_k}^B \quad (2)$$

(equações de Brinkman),

Onde ∇ é gradiente espacial, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, p e p^f são pressão local e a média intrínseca de fase da pressão local, \mathbf{v} e \mathbf{v}^D são vector da velocidade local e a velocidade de Darcy, ou seja a média de fase da velocidade local, μ representa a viscosidade de resina e \mathbf{K} o tensor de permeabilidade absoluta da fita de fibras. Quando as fibras podem-se considerar rígidas, impermeáveis e estacionárias, as seguintes condições de fronteira tem que ser satisfeitas na fronteira livre (com omissão comum de pressão de ar):

$$\boldsymbol{\sigma}_t^v = \mathbf{0} \text{ and } (\boldsymbol{\sigma}^v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - p = \sigma_n^v - p \approx -p = -p_c = -2\gamma H \quad \text{em } \Gamma_{t_k}^S, \quad (3)$$

$$p^f = P_c \quad \text{em } \Gamma_{t_k}^B, \quad (4)$$

onde σ^v é o tensor de tensão viscosa local, σ_n^v e σ_t^v componente normal e o vector da componente tangencial do vector de tensão viscosa na fronteira livre, p_c e P_c representam a pressão capilar local e a pressão capilar homogeneizada, γ é tensão de superfície de resina, H é curvatura média da fronteira, \mathbf{n} o vector da normal unitária externa, $\Gamma_{t_k}^B$ e $\Gamma_{t_k}^S$ designam a fronteira livre na região de Brinkman e de Stoke. O avanço da fronteira pode ser determinado de acordo com:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad \text{em } \Gamma_{t_k}^S, \quad (5)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^D}{\phi_t} \cdot \nabla f = 0 \quad \text{em } \Gamma_{t_k}^B, \quad (6)$$

onde $f(\mathbf{x}(t), t) = 0$ é função implícita que descreve a fronteira livre móvel, \mathbf{x} vector de variável espacial, t é o tempo e ϕ_t designa a porosidade de fita de fibras.

Pode-se então imediatamente reparar que há ambiguidade no ponto de intersecção da fronteira livre com $\Gamma_{t_k}^{S-B}$ em ambas condições, quer em (3-4) como em (5-6).

Outras condições de fronteira como periodicidade, simetria e as condições na entrada Γ_{in} dependem do problema particular, que está considerado.

3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

A simulação do escoamento de resina no nível mesoscópico foi resolvida pela incorporação das equações de fronteira livre no código dos elementos finitos comercializado - ANSYS, com a designação o PFL [2-4]. As dificuldades na implementação numérica têm origem no facto de ser ligados ao mesmo tempo dois tipos de escoamentos dos dois níveis diferentes numa análise só, com dependência no tempo. Além disso torna-se indispensável incluir a influência da tensão de superfície, que se pode modelar como pressão capilar aplicada na fronteira livre. Esta condição de fronteira essencial introduzida na forma forte afecta negativamente a exactidão da solução da análise de base. Os error assim introduzidos poderão ser removidos pelas técnicas de pós-processamento, como referido em Introdução.

As técnicas de pós-processamento da solução obtida pelo método dos elementos finitos são bem conhecidas e consistem em recálculo da solução obtida originalmente de tal maneira que a taxa de convergência aumenta sem a necessidade de recorrer às técnicas de refinamento da malha. Os novos valores habitualmente têm a mesma ordem de precisão como o error na energia de deformação e podem ser calculados como certas médias ponderadas da solução original. Isso significa que depois do recálculo a solução nova encaixa a solução que podia ser obtida numa malha muito mais fina. Estas técnicas são especialmente eficientes nos casos quando a maior precisão exige-se nas derivadas das variáveis nos nós na fronteira de aplicação da condição de Dirichlet na forma forte. O recálculo usa a solução original e o espaço das funções de teste que foram omitidas devido à condição de Dirichlet. Baseado nestes factos foi provado apenas recentemente que o método de Galerkin contínuo é

localmente conservativo [8]. Em resumo, estas técnicas podem ser excepcionalmente boas na modelação dos escoamentos de fronteira livre durante a infiltração de resina, porque apenas as velocidades na fronteira, onde a pressão capilar é aplicada, são precisas para determinar o avanço para a próxima posição.

No caso de escoamento de Darcy pode-se implementar a analogia com a análise térmica e usar as técnicas já publicadas, [5-8], no caso de escoamento de Stoke, apresenta-se uma metodologia nova, sugerida na forma preliminar em [9-10]. Ambas técnicas, apresentadas em [9-10], exigem ainda na implementação numérica no PFL uma parte de programação significativa, que está actualmente escrita em Fortran ou alternativamente em Maple para os casos mais simples. Sugere-se neste artigo uma alteração relativamente a [5-8], devido ao facto, que na forma original nem sempre foi obtido o melhoramento esperado e previsto em [5-8]. Implementação destas metodologias permite obter velocidades na fronteira livre com uma exactidão suficiente ainda para malhas grosseiras, o que significativamente diminui o tempo de cálculo. A perda de tempo gasta no re-cálculo ou correcção das velocidades na fronteira livre está completamente equilibrada pelo facto, que a forma da fronteira é mais exacta, mais lisa e assim é permitido usar um passo de tempo maior. Consequentemente a implementação desta metodologia assegura um cálculo mais rápido e sem problemas de oscilação de fronteira livre.

3.1. Técnicas de pós-processamento na parte de escoamento de Darcy

Na região, onde o escoamento de Darcy está plenamente desenvolvido, as componentes normais das velocidades na fronteira livre, onde a pressão capilar homogeneizada está imposta como a condição de fronteira essencial, podem ser recalculadas de acordo com a formulação [5-8]:

$$(q^h, \tilde{v}_n^{D,h})_{\Gamma_k^B} = B(q^h, p^{f,h}) - L(q^h) \quad \forall q^h \in \hat{P}^h, \quad (7)$$

onde B e L exprimem formas bi-linear e linear da formulação fraca. As componentes recalculadas $\tilde{v}_n^{D,h}$ têm a propriedade de convergência superior, em termos especificados em [14]. O espaço de funções de teste, \hat{P}^h , contém agora somente as funções originalmente omitidas na formulação fraca do problema, devido à condição nula na parte da fronteira Γ_k^B . O lado direito da equação (7) pode-se calcular directamente a partir da solução já obtida, $p^{f,h}$. O lado esquerdo da mesma equação exige apenas integração ao longo da fronteira livre, por isso a resolução pode-se obter como uma parte adicional no pós-processamento.

Neste caso pode-se usar a analogia com a análise térmica, e por isso a pressão pode-se substituir pela temperatura e em vez de velocidade de Darcy, assume-se o fluxo de calor. Na literatura costuma-se mostrar a eficácia desta técnica num problema simples, que tem a solução analítica, por exemplo:

$$\Delta\theta = 2(1-x^2) + 2(1-y^2) \quad \text{em } [-1,1] \times [-1,1], \quad (8)$$

$$\theta = 0 \quad \text{em } \partial([-1,1] \times [-1,1]), \quad (9)$$

cuja solução analítica é:

$$\theta = -(1-x^2)(1-y^2) \quad (10)$$

e por isso o fluxo, por exemplo nos lados horizontais é dado por:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} /_{y=\pm 1} = \pm 2(1-x^2). \quad (11)$$

Numa malha uniforme dos elementos quadrilaterais lineares de lado h , a matriz no lado esquerdo de (7) é tri-diagonal, os coeficientes na diagonal principal tem o valor $2h/3$ e fora de diagonal $h/6$. Assumindo que a numeração dos nós faz-se consequentemente ao longo da fronteira, pode-se concluir, que há uma única perturbação desta tri-diagonalidade na primeira e na última linha. Os valores no lado direito correspondem a integração pela área de dois elementos adjacentes, excepto das linhas que correspondem aos vértices do quadrado $[-1,1] \times [-1,1]$, onde a função de teste tem suporte apenas na área do elemento do canto. Usando a simetria, podem-se retirar do sistema apenas as equações correspondentes a uma das arestas do domínio. Neste caso o termo na diagonal principal da primeira e da última equação mantém-se $2h/3$ e o termo fora de diagonal é $h/3$. A solução recalculada tem boas propriedades apesar que no vértice do quadrado a normal exterior não está definida. Os resultados mostram-se na Figura 2.

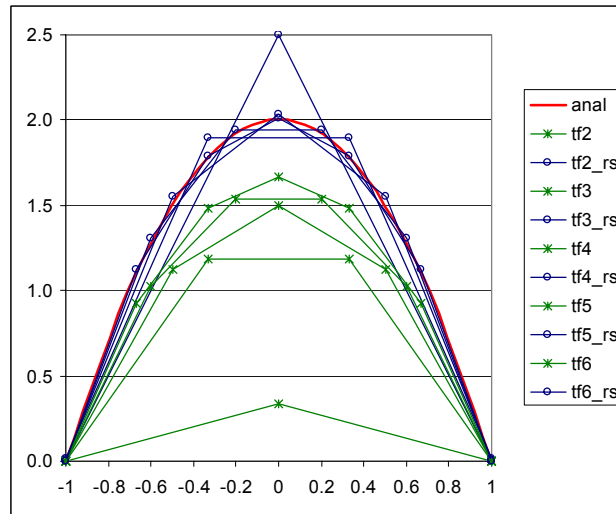


Figura 2. Fluxo do calor original e recalculado numa das arestas do domínio do problema (8-9).

Na legenda o “tf” designa o fluxo de calor, o número ao lado de “tf” refere-se ao número de divisões usadas para a criação da malha uniforme, “r” designa que a técnica de recálculo foi usada e “s” mostra que se usou a simetria. Os resultados parecem excelentes e para a malha de 6×6 elementos o máximo error relativo é 1,37%, excluindo os cantos. Nos cantos os valores não são zero, como na solução analítica e também na solução numérica original, mas

as diferenças parecem insignificativas devido a escala. Usando apenas uma aresta sem a incorporação de simetria, os coeficientes no lado esquerdo da primeira e da última equação são $h/3$ e $h/6$ e a solução recalculada apresenta uma perturbação inaceitável nos cantos, Figura 3a). Implementando a técnica sugerida em [6], estima-se o valor do fluxo nos cantos pelo zero, e o recálculo volta a ser parecido ao anterior, mas agora com o valor exacto nos cantos, Figura 3b). Na legenda “m” designa que a técnica de recálculo foi modificada.

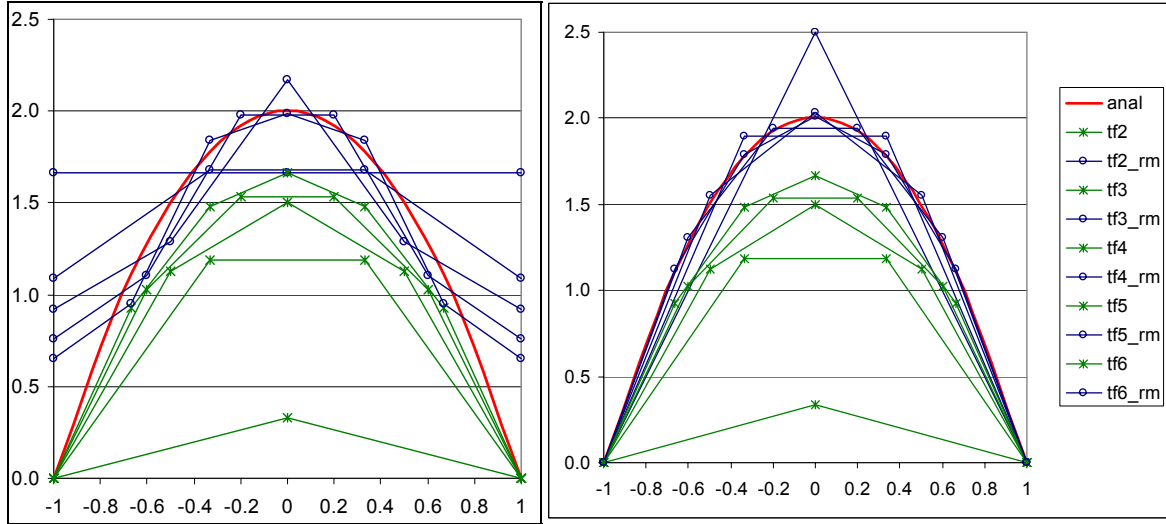


Figura 3. (a) Fluxo do calor recalculado sem utilização de simetria, (b) fluxo do calor recalculado com a implementação do valor estimado de acordo com [6].

É preciso sublinhar, que estes problemas “clássicos” não correspondem a situação de enchimento de resina. No caso de injeção, num lado (entrada) o fluxo será imposto, no outro lado (fronteira livre ou saída) condição de fronteira essencial será implementada para introduzir a pressão capilar, em analogia da temperatura. Nos restantes lados a condição de Neumann homogénea será introduzida e não existem fontes de “calor”. Estudaram-se por isso outros problemas para se avaliar a eficácia de pós-processamento nos problemas que reflectem melhor as situações de enchimento:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 0 \quad \text{em } [-1,1] \times [-1,1], \quad \frac{\partial\theta}{\partial n} = 0 \quad \text{para } x = \pm 1 \text{ e } y \in [-1,1] \\ \frac{\partial\theta}{\partial n} &= -10 \quad \text{para } y = -1 \text{ e } x \in [-1,1], \quad \theta(x) = \theta_0(x) \quad \text{para } y = 1 \text{ e } x \in \langle -1,1 \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Mostra-se primeiro, que nos casos quando a condição essencial na saída, $\theta_0(x)$, não pertence ao espaço C^1 com derivadas nula nas extremidades, ou seja quando o fluxo na saída tem singularidades, a técnica de recálculo não melhora os resultados e também as sugestões publicadas em [6] não ajudam. Em seguida sugere-se uma alteração no recálculo, que assegura ainda melhor convergência do que a técnica original de [5-8] nos casos quando

$\theta_0(x)$ seja uma função de C^1 com derivadas nula nas extremidades. Quando esta por cima assegura uma expansão do domínio pela simetria ou periodicidade, não existe o problema dos cantos, como é óbvio.

Para o primeiro ponto estudaram-se dois problemas com $\theta_0(x)$ na forma:

$$\theta_0(x) = 100(1 - |x|) \text{ (caso 1),} \quad \theta_0(x) = 100x^2 \text{ (caso 2).} \quad (13)$$

Em ambos casos separaram-se os resultados para as divisões da malha pares e ímpares e a solução analítica aproximou-se pela resolução da malha de 200×200 elementos. No caso 1 a temperatura imposta é linear em partes, formam-se duas singularidades no fluxo calculado e apesar que parecer que os valores recalculados aproximam a curva melhor, devido a oscilação dos valores nos intervalos fora das singularidades o valor do error absoluto é maior do que na solução original, Figura 4.

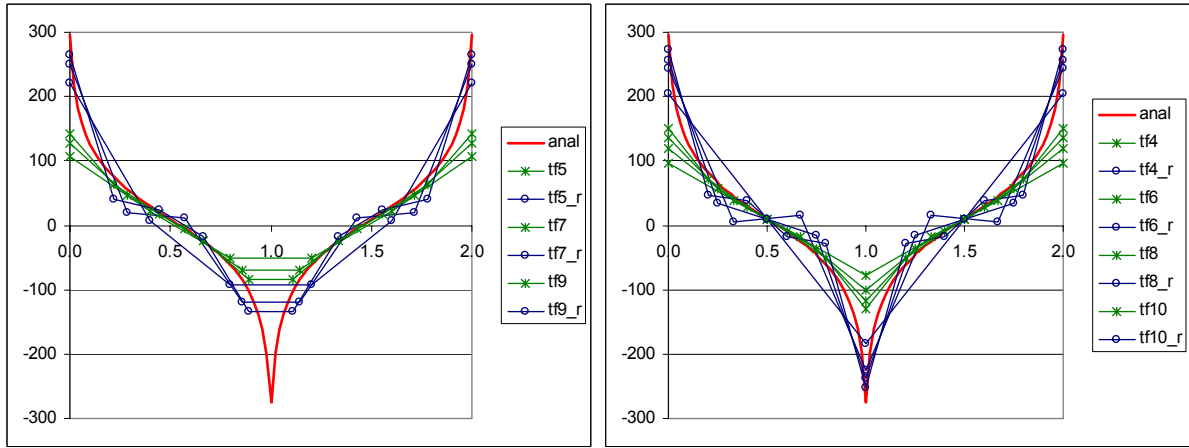


Figura 4. Fluxo do calor original e recalculado do problema (12-13, caso 1).

Também no caso 2 reparou-se a oscilação dos valores recalculados (Figura 5). Tentou-se primeiro melhorar os resultados do caso 2 pela técnica sugerida em [6]. Neste caso particular do canto recto, a fórmula da estimativa do fluxo no canto não se pode usar e por isso sugere-se em [6] uma estimativa quanto mais próxima do valor exacto, obtida pelas técnicas alternativas. O valor exacto é de facto infinito, mas olhando para as equações que deverão ser resolvidas no caso das divisões pares e substituindo o infinito no fluxo nos cantos, os valores novos ficariam completamente fora de questão. Estimando o valor do fluxo nos cantos pelo algum valor grande, os valores recalculados novamente não perdem a oscilação e além disso viola-se a conservação do fluxo na saída, o que não se verificou no recálculo original.

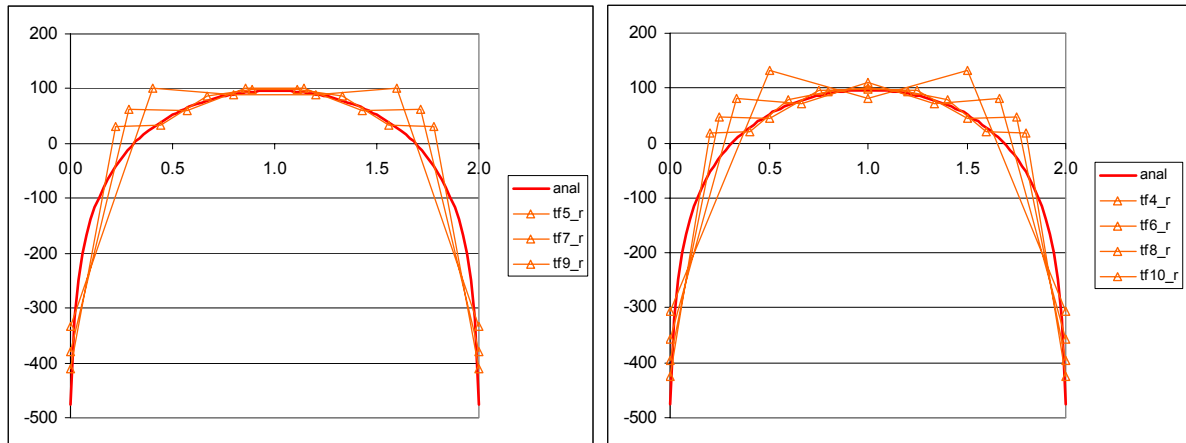


Figura 5. Fluxo do calor recalculado do problema (12-13, caso 2).

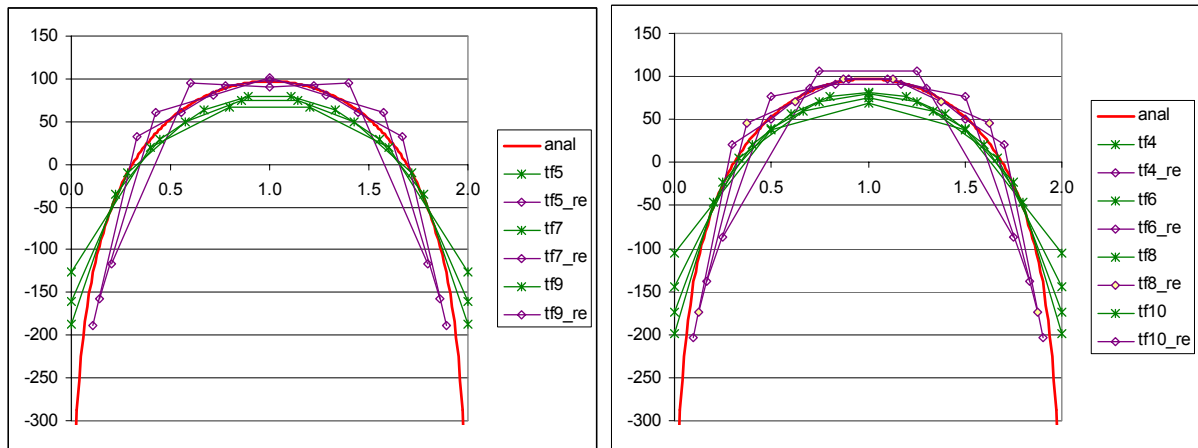


Figura 6. Fluxo do calor original e recalculado para os lados dos elementos do problema (12-13, caso 2).

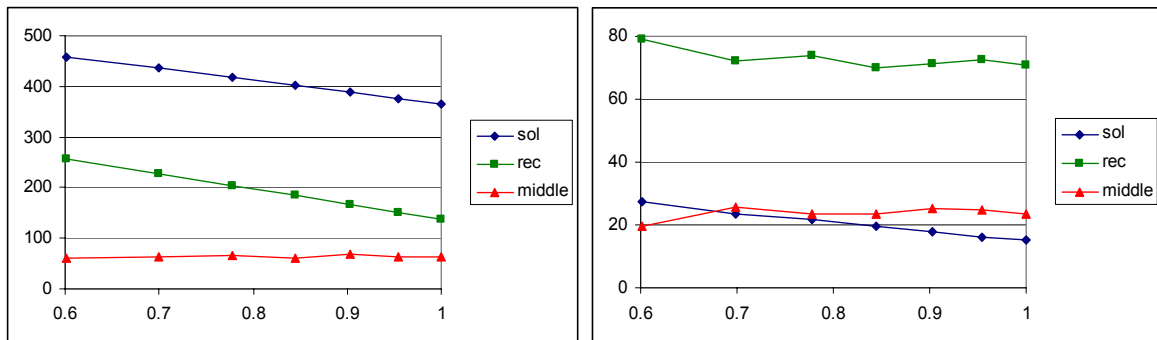


Figura 7. Comparação do erro máximo absoluto da solução original (“sol”), da solução recalculada pelo método original (“rec”) e da solução com o recálculo aos lados dos elementos (“middle”) em função do logaritmo de número das divisões da malha do problema (12-13, caso 2).

Sugere-se por isso uma alteração no recálculo e em vez do valor de fluxo nos nós usa-se o valor do fluxo no lado do elemento adjacente à fronteira livre, calculado com média dos valores recalculados nos nós (Figura 6, novos valores são designados na legenda “re”). Assim removeu-se quase a oscilação, manteve-se a conservação do fluxo na saída, mas na comparação do erro máximo absoluto, esta técnica ainda não está decisiva, Figura 7. Para o segundo ponto assumiu-se a distribuição de temperatura no lado livre na forma de:

$$\theta_0(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), \quad (14)$$

que é uma função de C^1 com derivadas nula nas extremidades, que além disso assegura uma expansão do domínio pela simetria e assim reflecte melhor os casos reais do enchimento. Os resultados mostram-se na Figura 8.

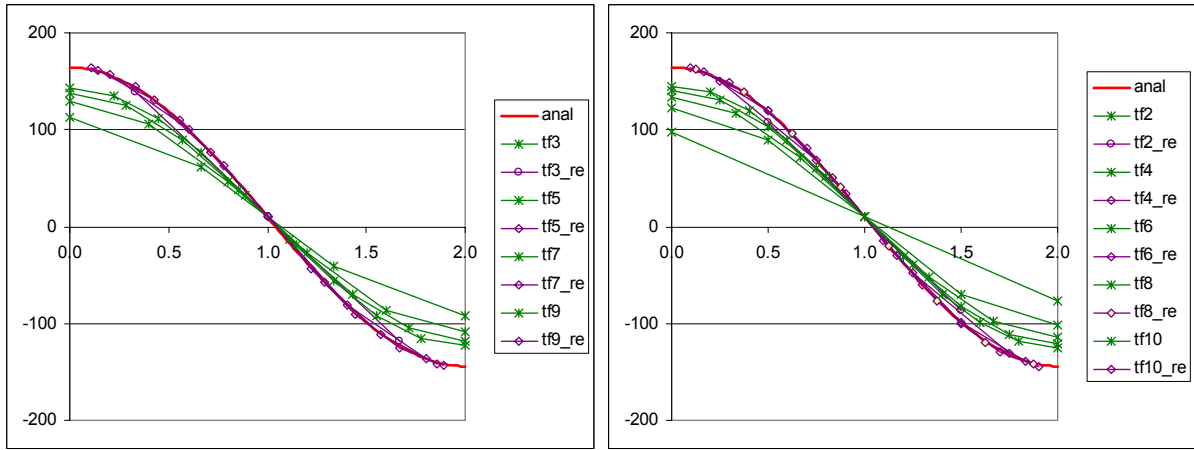


Figura 8. Fluxo do calor original e recalculado para os lados dos elementos do problema (12-13, caso 2).

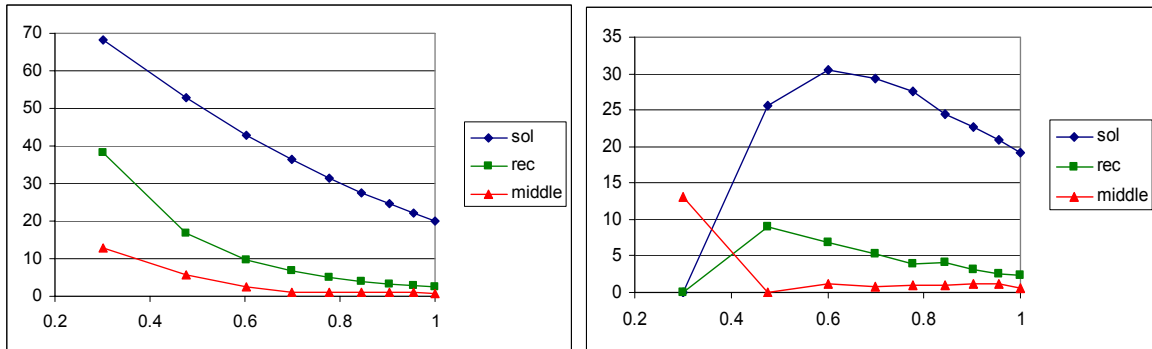


Figura 9. Comparação do erro máximo absoluto da solução original (“sol”), da solução recalculada pelo método original (“rec”) e da solução com o recálculo aos lados dos elementos (“middle”) em função do logaritmo de número das divisões da malha do problema (12-13, caso 2).

Nota-se que as propriedades das funções recalculadas são excelentes, com uma malha de

10x10 elementos (lado 0.2) o máximo erro relativo é apenas 0,66% (para o caso de recálculo original é 2,1%). Mostra-se nos gráficos da Figura 9 a convergência dos resultados. Na figura do lado esquerdo todo intervalo $[-1,1]$ é usado para o cálculo do error, na figura do lado direito valores nas extremidades são excluídos. Em ambos casos o melhor comportamento nota-se no caso de recálculo para os lados dos elementos, excepto de malha 2x2, onde excluindo as extremidades o único valor de comparação toma o valor exacto devido a simetria.

Em conclusão, para o escoamento de Darcy pode-se usar o pós-processamento introduzido em [5-8]. Mas a melhor convergência pode-se atingir incluindo a alteração sugerida neste artigo, ou seja depois de recálculo original para os nós, calcular o valor do fluxo nos lados dos elementos e este usar para o avanço da fronteira. Além disso é preciso verificar as estimativas de pressão capilar homogeneizada antes de serem aplicadas, para não criar problemas numéricos adicionais, que não correspondem a realidade.

3.2. Diminuição do error na parte de escoamento de Stoke

A metodologia implementada na região de escoamento de Stoke usa o seguinte esquema:

$$\begin{aligned} (q^h, w_n^h)_{\Gamma_k^s} &= (q^h, \nabla \cdot v^h) \quad \forall q^h \in \hat{P}^h, \\ \tilde{v}_n^h &= v_n^h - w_n^h, \end{aligned} \quad (15)$$

onde w_n^h é um valor auxiliar da velocidade normal, usado para a correcção das velocidades calculadas no problema original, v_n^h . A equação (15) é parecida com a forma (7), mas no presente caso a condição de incompressibilidade está completamente separada da formulação fraca do problema de Stoke. Esta técnica é nova, foi sugerida na forma preliminar em [9-10], em [10] prova-se que no caso unidimensional o recálculo assegura a solução analítica.

A eficácia da técnica (15) mostra-se no problema semelhante ao da secção anterior. Para uma resina de viscosidade unitária o problema escreve-se na maneira seguinte:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v &= 0 \text{ e } \nabla p = \mu \Delta v \quad \text{em } [-1,1] \times [-1,1], \quad v_x = 0 \quad \text{para } x = \pm 1 \text{ e } y \in [-1,1] \\ v_y &= 10 \quad \text{para } y = -1 \text{ e } x \in [-1,1], \quad p(x) = p_0(x) \quad \text{para } y = 1 \text{ e } x \in \langle -1,1 \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

A condição essencial de Dirichlet escolhe-se novamente na forma:

$$p_0(x) = 100 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right). \quad (17)$$

$p_0(x)$ é uma função de C^1 com derivadas nula nas extremidades, que assegura uma expansão do domínio pela simetria. Assim elimina-se o problema dos cantos onde a normal exterior não está definida.

Nota-se que as propriedades das funções recalculadas são excelentes, com uma malha de 10x10 elementos (lado 0.2) o máximo erro relativo é apenas 1,05%.

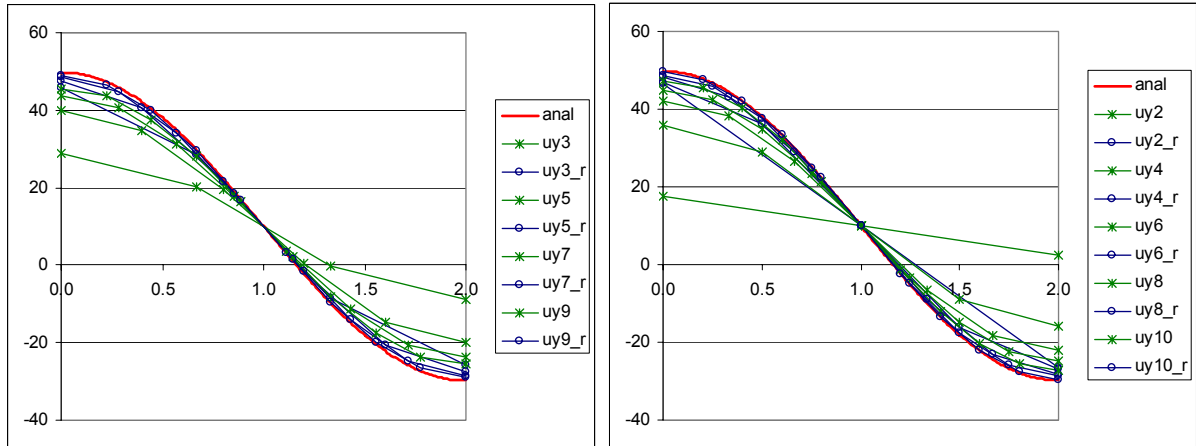


Figura 10. Velocidades normais na fronteira livre em valores originais e recalculados de acordo com (15) do problema (16-17).

Tentou-se também alterar os valores recalculados para os lados dos elementos, mas neste caso não se verificou nenhum melhoramento como no caso de escoamento de Darcy, como se verifica na comparação do error absoluto na Figura 11. Novamente para a figura do lado esquerdo todo intervalo $[-1,1]$ é usado para o cálculo do error, na figura do lado direito valores nas extremidades são excluídos. Em ambos casos o melhor comportamento nota-se no caso sem o recálculo para os lados dos elementos.

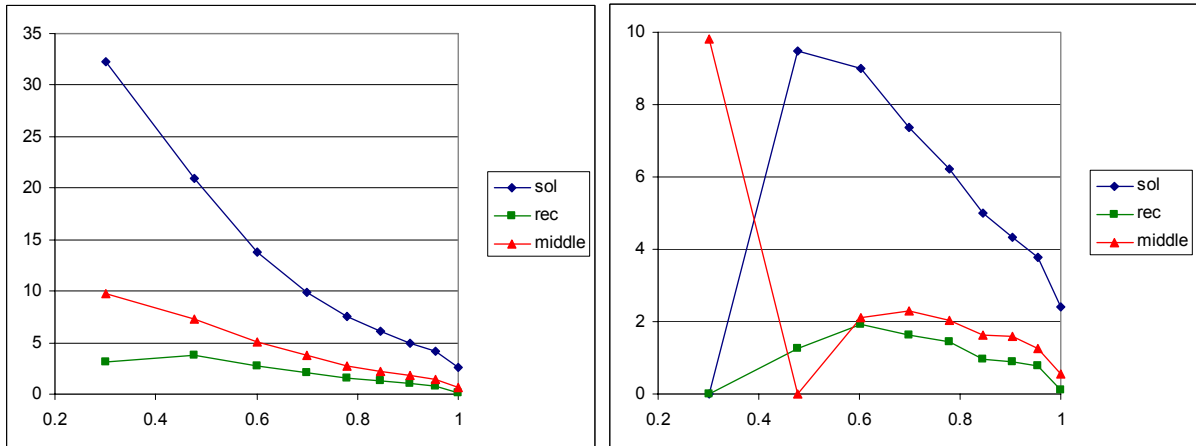


Figura 11. Comparação do erro máximo absoluto da solução original (“sol”), da solução recalculada pelo método (15) (“rec”) e da solução com o recálculo aos lados dos elementos (“middle”) em função do logaritmo de número das divisões da malha do problema (16-17).

Em conclusão, para o escoamento de Stoke pode-se usar o pós-processamento introduzido em [9-10] usando a técnica descrita em (15). Além disso é também preciso verificar as estimativas de pressão capilar antes de serem aplicadas, para não criar problemas numéricos adicionais, que não correspondem a realidade.

4. CONCLUSÕES

Neste artigo apresentaram-se duas metodologias de pós-processamento das velocidades normais na fronteira livre dos escoamentos de resina no nível mesoscópico da fase de injeção dos processos de moldação líquida. Ambas são implementadas no PFL. Para o escoamento de Darcy identificam-se os casos quando a metodologia publicada em [5-8] não melhora os resultados obtidos e sugere-se uma alteração da metodologia. A metodologia para o escoamento de Stoke, é nova, numa forma preliminar foi sugerida em [9-10]. A eficácia destas técnicas de pós-processamento mostra-se nos problemas de teste simples. A implementação no PFL assegura não só uma melhor conservação de massa em termos globais, mais também em termos locais, relativamente a cada elemento. Este facto é muito importante para traçar a progressão da fronteira livre correctamente, porque o pressuposto de escoamento quase estacionário é adoptado e no avanço da fronteira usa-se a integração explícita. Isso significa que os erros na forma de fronteira são irrecuperáveis. A perda de tempo gasta no re-cálculo das velocidades na fronteira livre está completamente equilibrada pelo facto, que a forma da fronteira é mais exacta, mais lisa e assim é permitido usar um passo de tempo maior. Consequentemente a implementação desta metodologia assegura um cálculo mais rápido e sem problemas de oscilação de fronteira livre, ainda para malhas grossas. As simulações numéricas conseguem reproduzir uma possível física de formação dos vazios, quer nos espaços entre as fitas de fibras, quer dentro das fitas na forma de micro-vazios. As simulações exibem uma coincidência aceitável com ensaios experimentais, disponíveis nas publicações dos outros autores.

REFERÊNCIAS

- [1] S.G. Advani e Z. Dimitrovová, 2004, *Role of capillary driven flow in composite manufacturing*. S. Hartland ed. *Surface and Interfacial Tension: Measurement, Theory and Applications*, Surfactant Science Series Vol. **119**, Capítulo 5, pp. 263-312, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [2] Z. Dimitrovová e S.G. Advani, “Mesolevel analysis of the transition region formation and evolution during the liquid composite molding process”, *Computers & Structures*. Vol. **82**, pp. 1333-1347, (2004).
- [3] Z. Dimitrovová e S.G. Advani, “Analysis and characterization of relative permeability and capillary pressure for free surface flow of a viscous fluid across an array of aligned cylindrical fibers”, *Journal of Colloid and Interface Science*. Vol. **245**, pp. 325-337 (2002).
- [4] Z. Dimitrovová e S.G. Advani, “Free boundary viscous flows at micro and mesolevel during liquid composites molding process”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. **46**, pp. 435-455, (2004).
- [5] G.F. Carey, “Derivative calculation from finite element solution”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol **35**, pp. 1-14, (1982).
- [6] G.F. Carey, S.S. Chow e M.K. Seager, “Approximate boundary-flux calculations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol **50**, pp. 107-120,

- (1985).
- [7] A. Mizukami, "A mixed finite element method for boundary flux calculations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol **57**, pp. 239-243, (1986).
 - [8] T.J.R. Hughes, G. Engel, L. Mazzei e M.G. Larson, "The continuous Galerkin method is locally conservative", *Journal of Computational Physics*. Vol. **163**, pp. 467-488 (2000).
 - [9] Z. Dimitrovová e S.G. Advani, *Numerical Method to Predict Void Formation during The Liquid Composite Molding Process*. Acta de 7th International Conference on Flow Processes in Composite Materials, Newark, Delaware, EUA, Julho, 2004, pp. 269-274, (2004).
 - [10] Z. Dimitrovová e S.G. Advani, *Mass Conservation Enhancement of Free Boundary Mesolevel Flows during LCM Processes of Composites Manufacturing*. Acta de 7th International Conference on Computational Structures Technology, Lisbon, Portugal, Setembro 2004, pp. 49-50, (2004).
 - [11] R.S. Parnas e F.R. Phelan, "The effect of heterogeneous porous media on mold filling in resin transfer molding", *SAMPE Quarterly*. Vol. **22**, pp. 53-60, (1991).
 - [12] R.S. Parnas, A.J. Salem, T.A.K. Sadiq, H.P. Wang e S.G. Advani, "The interaction between micro- and macroscopic flow in RTM preforms", *Composite Structures*. Vol. **27**, pp. 93-107, (1994).
 - [13] T.A.K. Sadiq, S.G. Advani e R.S. Parnas, "Experimental investigation of transverse flow through aligned cylinders", *International Journal of Multiphase Flow*. Vol. **21**, pp. 755-774, (1995).
 - [14] M.A.A. Spaid e F.R. Phelan, "Modeling void formation dynamics in fibrous porous media with the Lattice Boltzman method", *Composites A*. Vol. **29A**, pp. 749-755, (1998).
 - [15] N. Patel e L.J. Lee, "Effects of fiber mat architecture on void formation and removal in liquid composite molding", *Polymer Composites*. Vol. **16**, pp. 386-399, (1995).
 - [16] N. Patel, V. Rohatgi e L.J. Lee, "Micro scale flow behavior and void formation mechanism during impregnation through a unidirectional stitched fiberglass mat", *Polymer Engineering and Science*. Vol. **35**, pp. 837-851, (1995).
 - [17] C. Binetruy, B. Hilaire e J. Pabiot, "The influence of fiber wetting in resin transfer molding: scale effects", *Polymer Composites*. Vol. **24**, pp. 548-557, (2000).
 - [18] I. Babuška e A. Miller, "The post-processing approach in the finite element method - Part 1: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. **20**, pp. 1085-1109, (1984).